

挡土墙主动土压力塑性临界深度的解析解

彭明祥

(广东省电力设计研究院, 广州 510663)

摘要: 墙后塑性区的临界深度问题一直没有得到很好解决, 传统计算公式仅适用于一些特殊情况。基于极限平衡理论, 视墙后填土为服从 Mohr-Coulomb 屈服准则的理想弹塑性材料, 假定塑性区的一族滑移线为直线即平面滑裂面, 提出弹性覆盖层取代传统的张拉裂缝, 建立了较为完善的滑楔分析模型, 采用极限平衡法推导了在一般情况下的塑性临界压力、临界深度以及塑性区可能最大深度的解析解。计算结果表明, 塑性临界深度的解析解与目前文献采用迭代计算的结果完全一致, 传统计算公式是该解析解的一个特例。

关键词: 挡土墙; 主动土压力; 塑性临界压力; 塑性临界深度; 可能最大深度; 弹性覆盖层
中图分类号: TU 432 **文献标识码:** A

Analytical solution of plastic critical depth for active earth pressure on retaining wall

PENG Ming-xiang

(Guangdong Electric Power Design Institute, Guangzhou 510663, China)

Abstract: The problem of critical depth for plastic zone behind the retaining wall has not yet been solved well. The conventional calculation formula is only applicable for some special cases. This paper is based on the limit equilibrium theory, in which the backfill is treated as a perfectly elastoplastic material following the Mohr-Coulomb yield criterion; and it is assumed that a family of slip lines in the plastic zone are straight lines, i.e. the plane slip surfaces. The elastic overburden is put forward to replace the conventional tension crack; and a more reasonable slip wedge analysis model is established. The analytical solutions of the plastic critical pressure and critical depth and the possible maximum depth in plastic zone for active earth pressure on retaining wall in general case are deduced using limit equilibrium method. The calculation results show that the analytical solution of the plastic critical depth is identical with the result by iterative calculation in existing literatures and the conventional calculation formula is a special case of this analytical solution.

Key words: retaining wall; active earth pressure; plastic critical pressure; plastic critical depth; possible maximum depth; elastic overburden

1 引言

关于挡土墙土压力的计算理论很多, 其中比较著名的有库仑土压力理论^[1]和朗肯土压力理论^[2], 当初都是针对无黏性土的。如图 1 所示, 在墙背面垂直光滑和地面水平的情况下, Resal^[3]首先将朗肯主动土压力推广到黏性土, 也就是现在人们熟悉的经典朗肯主动土压力:

$$p_a(h) = (\gamma h + q) \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - 2c \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \quad (1)$$

式中: h 为计算点到墙顶面的垂直深度; q 为地面均布超载; γ 为墙后填土重度; c 为黏聚力; φ 为内摩擦角。当 $q < 2c \tan(\pi/4 + \varphi/2)$ 时, 上式可改成:

$$p_a(h) = \gamma(h - h_0) \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \quad (2)$$

式中: h_0 为主动土压力 0 点(即图 1 中的 A 点)到墙顶面的垂直深度, 是计算主动土压力时务必事先求解的一个未知量, 称之为塑性临界深度。其物理意义是: 当 $h \geq h_0$ 时, 墙后土体处于主动极限平衡状态, 对墙背产生主动极限土压力; 当 $h < h_0$ 时, 墙

后土体仍处于弹性状态。当墙后填土为黏性土时,过去通常假定地面出现垂直向下且深度相等的张拉裂缝,如图1虚线所示,Terzaghi^[4]给出了该裂缝深度 z_0 的传统计算公式:

$$z_0 = \frac{2c}{\gamma} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{q}{\gamma} \quad (3)$$

显然,经典朗肯主动土压力的 h_0 和 z_0 总是相等的。

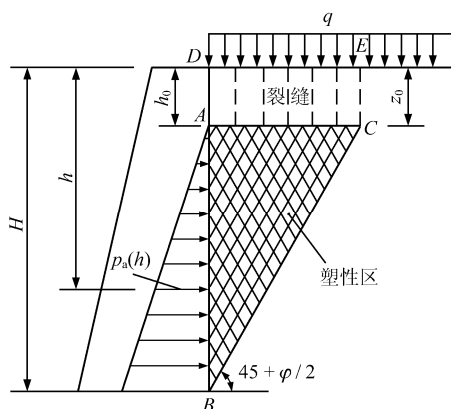


图1 经典朗肯主动土压力
Fig.1 Classical Rankine active earth pressure

然而,如欲将库仑主动土压力推广到一般黏性土,则问题会复杂得多。文献[5]求得了墙背垂直且无黏结力及地面倾斜的黏性土主动土压力的解析解,还给出裂缝深度的计算公式,该公式与地面倾角无关,同式(3),并且 h_0 和 z_0 也相等,Silvestri^[6]后来指出了该解首先由Resal^[3]获得。但在一般情况下,当考虑所有设计参数影响时,文献[7-9]在推导主动土压力计算公式的过程中,仍按式(3)计算裂缝深度,而且有的仍认为 h_0 和 z_0 近似相等,这种做法会给土压力计算结果带来一定误差。如图2所示,可以证明, h_0 和 z_0 应满足以下一般关系式:

$$z_0 = h_0 \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cos \beta} \quad (4)$$

式中: α 为墙背面水平倾角; β 为地面水平倾角(负值表示坡面向下倾斜),文献[9-10]都考虑了这一关系。文献[10]基于极限平衡理论,假定墙后填土为服从Mohr-Coulomb屈服准则的理想弹塑性材料,并假定塑性区的一族滑移线为直线,即平面滑裂面,提出“弹性覆盖层”替代传统的“张拉裂缝”,建立较为完善的滑楔分析模型,求解了挡土墙主动土压力的库仑统一解,还给出求解塑性临界深度的方程式。除一些特例外,一般情况下需采用迭代算

法求解,故工程应用不够方便。

本文从文献[10]的基本假定出发,采用极限平衡法推导了挡土墙主动土压力的塑性临界压力、塑性临界深度以及塑性区可能最大深度的解析解。

2 塑性临界深度

2.1 基本假定

图2为挡土墙主动土压力的计算模型,基本假定同文献[10]:①按平面应变问题考虑;②墙后填土为理想弹塑性材料,服从Mohr-Coulomb屈服准则;③三角形楔体ABC为墙后塑性区,过墙背面任一点M的滑移线为直线,即MN为平面滑裂面;④墙土接触面AB满足库仑摩擦定律;⑤弹塑性区交界面AC为平面且平行于地面DE,作用均布压力为

$$\tilde{q} = q + \gamma z_0 \quad (5)$$

式中: z_0 为弹性覆盖层的垂直深度,即通常所谓的地面裂缝深度。

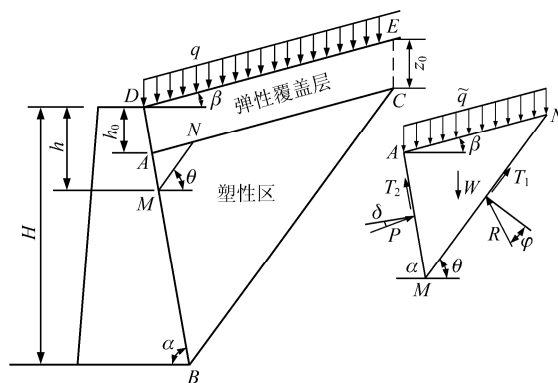


图2 计算模型
Fig.2 Calculation model

2.2 计算公式推导

设挡土墙高度为 H ,填土与墙背面之间的黏结力为 c_w ,外摩擦角为 δ 。取塑性土楔 AMN 为研究对象,土楔上的作用力有:

(1) AN 面上均布荷载的合力 Q ,垂直向下:

$$Q = \tilde{q}(h - h_0) \frac{\sin(\theta + \alpha) \cos \beta}{\sin \alpha \sin(\theta - \beta)} \quad (6)$$

式中: h 为计算点 M 至墙顶面的垂直深度; θ 为平面滑裂面 MN 的水平倾角。

(2) 塑性土楔 AMN 自重 W ,垂直向下:

$$W = \frac{1}{2} \gamma (h - h_0)^2 \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\theta + \alpha)}{\sin^2 \alpha \sin(\theta - \beta)} \quad (7)$$

(3) 滑裂面 MN 上的黏聚力 T_1 ,沿滑裂面向上:

$$T_1 = c(h - h_0) \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin(\theta - \beta)} \quad (8)$$

(4) 滑裂面 MN 上的土反力 R , 与滑裂面法线成 φ 角。

(5) 墙土接触面 AM 上的黏结力为 T_2 , 沿接触面向上:

$$T_2 = c_w(h - h_0) \frac{1}{\sin \alpha} \quad (9)$$

(6) 墙背面对土楔的反力 P , 与墙背面法线成 δ 角:

$$P = \bar{p}(h - h_0) \frac{\cos \delta}{\sin \alpha} \quad (10)$$

式中: $\bar{p}$ 为墙背面 AM 段的主动土压力平均强度。

由于以上 6 个力的方向已知, 而且 Q 、 W 、 T_1 、 T_2 大小可计算, 根据塑性土楔在水平方向和垂直方向的 2 个极限平衡条件, 可得

$$P \sin(\alpha - \delta) + T_1 \cos \theta - T_2 \cos \alpha - R \sin(\theta - \varphi) = 0 \quad (11)$$

$$P \cos(\alpha - \delta) + T_1 \sin \theta + T_2 \sin \alpha + R \cos(\theta - \varphi) = W + Q \quad (12)$$

联立式 (11) 和式 (12) 并消去 R , 可得

$$\begin{aligned} P \sin(\theta + \alpha - \varphi - \delta) + T_1 \cos \varphi = \\ T_2 \cos(\theta + \alpha - \varphi) + (W + Q) \sin(\theta - \varphi) \end{aligned} \quad (13)$$

将式 (6) ~ (10) 代入式 (13), 并注意到当 h 趋于 h_0 时, 平均强度 $\bar{p}$ 趋于 0, 经整理化简后可得

$$\tilde{q} = \frac{c \sin(\alpha + \beta) \cos \varphi - c_w \sin(\theta - \beta) \cos(\theta + \alpha - \varphi)}{\sin(\theta + \alpha) \sin(\theta - \varphi) \cos \beta} \quad (14)$$

在设计参数一定的情况下, $\tilde{q}$ 是关于滑裂面倾角 θ 的函数, 而最小 $\tilde{q}$ 值所对应的滑裂面就是 A 点处的主动极限滑裂面。当 $c > 0$ 时, 根据极值条件 $d\tilde{q}/d\theta = 0$, 可得到关于 $\tan \theta$ 的一元二次方程:

$$A_0 \tan^2 \theta + 2B_0 \tan \theta + C_0 = 0 \quad (15)$$

取该方程的其中一个根:

$$\theta_a = \arctan \left(\frac{-B_0 + \sqrt{B_0^2 - A_0 C_0}}{A_0} \right) \quad (16)$$

式中: θ_a 为 A 点的主动滑裂面倾角, 方程系数 A_0 、 B_0 、 C_0 按下式计算:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \sin(\alpha - \varphi) + m \cos^2 \alpha \\ B_0 &= -\cos(\alpha - \varphi) + m \sin \alpha \cos \alpha \\ C_0 &= -\sin(\alpha - \varphi) + m \sin^2 \alpha \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式中: 系数 m 按下式计算:

$$m = \frac{c_w \cos \beta}{(c + c_w) \sin(\alpha + \beta) \cos \varphi} \quad (18)$$

特别地, 当系数 $A_0 = 0$ 时, 若 $\alpha < \pi/2$, 则 $\theta_a = \pi/2$; 若 $\alpha > \pi/2$, 则 $\theta_a = \arctan(-C_0/B_0/2)$ 。

设 $\Delta_0 = 1 - m \sin(\alpha + \varphi)$, 可以证明, 方程判别式 $B_0^2 - A_0 C_0 \geq 0$ 与 $\Delta_0 \geq 0$ 互为等价条件, 故若 $\Delta_0 \geq 0$, 则方程有 2 个实根, 又由于系数 $A_0 > 0$, 所以 θ_a 为方程的较大根。现将系数 A_0 、 B_0 、 C_0 代入式 (16), 可得

$$\tan \theta_a = \frac{\cos(\alpha - \varphi) - m \sin \alpha \cos \alpha + \sqrt{1 - m \sin(\alpha + \varphi)}}{\sin(\alpha - \varphi) + m \cos^2 \alpha} \quad (19)$$

可见, A 点的主动滑裂面倾角 θ_a 仅与参数 α 、 φ 、 m 有关。

将 θ_a 代入式 (14), 即可得到使墙背面 A 点达到主动极限平衡状态的最小 $\tilde{q}$ 值, 不妨称之为塑性临界压力, 记作 $\tilde{q}_0$ 。一般而言, 塑性临界压力 $\tilde{q}_0$ 与参数 α 、 β 、 c 、 φ 、 c_w 有关, 而与 H 、 q 、 γ 、 δ 无关。不难证明, 当 $c > 0$ 时, 无量纲数 $\tilde{q}_0/c$ 只是关于 α 、 β 、 φ 、 c_w/c 的函数。在某些特别条件下, 例如经典库仑主动土压力的 $\tilde{q}_0 = 0$, 经典朗肯主动土压力的 $\tilde{q}_0 = 2c \tan(\pi/4 + \varphi/2)$ 。

如地面均布超载 $q < \tilde{q}_0$, 则作用于弹塑性区交界面 AC 上的均布压力 $\tilde{q} = \tilde{q}_0$, 故欲使 A 点进入主动极限平衡状态, 尚需由土重补充不足部分的压力, 即存在弹性覆盖层, 其垂直深度 z_0 可按式 (5) 计算, 再将 z_0 代入式 (4), 即可求得塑性临界深度:

$$h_0 = \frac{\tilde{q}_0 - q}{\gamma} \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (20)$$

可见, h_0 与参数 q 、 α 、 β 、 γ 、 c 、 φ 、 c_w 有关, 而与 H 、 δ 无关。如 $q \geq \tilde{q}_0$, 则 $\tilde{q} = q$, 由式 (4)、(5) 可算得 z_0 、 h_0 均为 0, 即不存在弹性覆盖层。

若采用 A 点处的主动土压力系数表示 h_0 , 则式 (20) 可改写成:

$$h_0 = \frac{cK_{a2} + c_w K_{a3}}{\gamma K_{a1}} - \frac{q \sin \alpha \cos \beta}{\gamma \sin(\alpha + \beta)} \quad (21)$$

如计算值小于0,则取 $h_0 = 0$ 。式中: K_{a1} 、 K_{a2} 、 K_{a3} 为A点处的主动土压力系数,按下式计算^[10]:

$$\left. \begin{aligned} K_{a1} &= \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\theta_a - \varphi) \sin(\theta_a + \alpha)}{\sin^2 \alpha \sin(\theta_a - \beta) \sin(\theta_a + \alpha - \varphi - \delta)} \\ K_{a2} &= \frac{\sin(\alpha + \beta) \cos \varphi}{\sin \alpha \sin(\theta_a - \beta) \sin(\theta_a + \alpha - \varphi - \delta)} \\ K_{a3} &= \frac{-\cos(\theta_a + \alpha - \varphi)}{\sin \alpha \sin(\theta_a + \alpha - \varphi - \delta)} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

可见,解析解式(21)与文献[10]直接由主动土压力强度为0所给出的方程式进行比较,两者有着相同的数学形式,然而意义却不同,前者 K_{a1} 、 K_{a2} 、 K_{a3} 为已确定值,而后者在一般情况下仍是关于 h_0 的函数。

2.3 几个特殊情况

(1) 当 $c = c_w = 0$ (经典库仑条件)时,可直接由式(14)得到塑性临界压力 $\tilde{q}_0 = 0$,故 $h_0 = 0$ 。

(2) 当 $c > 0$, $c_w = 0$ 时,总有 $m = 0$, $\Delta_0 = 1 > 0$,可求得A点的滑裂面倾角:

$$\theta_a = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha - \varphi}{2} \quad (23)$$

代入式(14)可得到塑性临界压力:

$$\tilde{q}_0 = \frac{2c \sin(\alpha + \beta) \cos \varphi}{[1 + \cos(\alpha + \varphi)] \cos \beta} \quad (24)$$

若 $q < \tilde{q}_0$,则塑性临界深度可按下式计算:

$$h_0 = \frac{2c}{\gamma} \frac{\sin \alpha \cos \varphi}{1 + \cos(\alpha + \varphi)} - \frac{q}{\gamma} \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (25)$$

特别地,当 $\alpha = \pi/2$ 时,上式可化简为

$$h_0 = \frac{2c}{\gamma} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{q}{\gamma} \quad (26)$$

又由式(4)可得 $z_0 = h_0$ 。由此可见,传统计算公式(3)是本文解析解的一个特例,其适用条件为 $c_w = 0$, $\alpha = \pi/2$ 。

(3) 当 $c \geq c_w > 0$ 时,若 $\Delta_0 = 0$,则A点的滑裂面倾角 $\theta_a = \varphi$ 及 $K_{a1} = 0$,然而,在这种情况下还应验算 K_{a2} 、 K_{a3} 是否均不小于0。

3 塑性区可能最大深度

根据文献[10]的研究成果,如若 $\beta > \varphi$,则总会存在一个深度 h_1 ,只有当 $h \leq h_1$ 时,才能保证判别式 $\Delta_1 \geq 0$,使相应的一元二次方程有实根,故

不妨称 h_1 为墙后塑性区的可能最大深度。“可能最大”的含义是墙后有可能出现的、最大的塑性区深度,而根据基本假定,实际最大深度还与墙高 H 有关,为 H 和 h_1 二者中的较小值。 h_1 可按式计算:

$$h_1 = \frac{2c}{\gamma} \frac{\sin \alpha \cos \varphi}{\sin(\alpha + \beta) \sin(\beta - \varphi)} - \frac{2q}{\gamma} \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} - h_0 \quad (27)$$

另外,若 $\beta \leq \varphi$,则无论 h 多大,恒有 $\Delta_1 \geq 0$,故墙后塑性区的可能最大深度为正无穷大,即 $h_1 = +\infty$ 。应当指出,文献[11]也曾经研究过类似的问题,但由于计算模型不同,故关于 h_1 的计算公式也有所不同。

现结合算例3讨论当 $\beta > \varphi$ 、 $H > h_1$ 时的情况。在 $h = h_1$ 处有 $\Delta_1 = 0$,可求得通过该处的滑裂面倾角 $\theta_a = \beta$,如图3所示,墙后塑性区为无限区域 $AB'C'C$,有 $AC \parallel B'C'$ 。将 $\theta_a = \beta$ 代入文献[10]的相关计算公式,并运用洛必达法则,可得到作用于挡土墙 AB' 面上的主动极限土压力合力为

$$\begin{aligned} P_a &= (h_1 - h_0) \left[\frac{1}{2} \gamma (h_1 + h_0) + q \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \right] \cdot \\ &\quad \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha + 2\beta - \varphi)}{\sin^2 \alpha \sin(\alpha + \beta - \varphi - \delta)} + \\ &\quad c_w (h_1 - h_0) \frac{\cos(\alpha + \beta - \varphi)}{\sin \alpha \sin(\alpha + \beta - \varphi - \delta)} \end{aligned} \quad (28)$$

按照文献[10]可计算任意深度处的主动土压力强度,如图3所示。可见,在 $\beta > \varphi$ 、 $H > h_1$ 的情况下,主动土压力分布呈明显的非线性分布且不收敛,在 $h = h_1$ 处其强度为无穷大。应当指出,因 h_1 以下墙后土体未能进入主动塑性平衡状态,故无主动极限土压力,这应与实际有无土压力区别开来。

4 算例

4.1 算例1

某挡土墙 $H = 10$ m, $q = 20$ kPa, $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 10^\circ$, $\gamma = 20$ kN/m³, $c = 15$ kPa, $\varphi = 30^\circ$, $c_w = 0$, $\delta = 15^\circ$ 。计算结果如下: $m = 0$, $\Delta_0 = 1 > 0$, $\theta_a = 60^\circ$, $\tilde{q}_0 = 51.96$ kPa, $h_0 = 1.60$ m,且 $z_0 = h_0$,与按传统公式(3)计算的结果完全相同。

4.2 算例2

某挡土墙 $H = 10$ m, $q = 20$ kPa, $\alpha = 95^\circ$, $\beta = 10^\circ$, $\gamma = 19$ kN/m³, $c = 15$ kPa, $\varphi = 25^\circ$, $c_w = 10$ kPa, $\delta = 10^\circ$ 。计算结果如下: $m = 0.45$, $\Delta_0 = 0.61 > 0$, $\theta_a = 50.94^\circ$, $\tilde{q}_0 = 68.39$ kPa, $h_0 = 2.59$ m,与文

献[10]采用迭代算法求解的结果完全相同。

4.3 算例 3

某挡土墙 $H = 10 \text{ m}$, $q = 10 \text{ kPa}$, $\alpha = 85^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 19 \text{ kN/m}^3$, $c = 18 \text{ kPa}$, $\varphi = 20^\circ$, $c_w = 10 \text{ kPa}$, $\delta = 10^\circ$ 。计算结果如下: $m = 0.36$, $\Delta_0 = 0.65 > 0$, $\theta_a = 52.78^\circ$, $\tilde{q}_0 = 54.38 \text{ kPa}$, $h_0 = 2.22 \text{ m}$; 由于 $\beta > \varphi$, 按式(27)算得 $h_1 = 8.04 \text{ m}$; 又由于 $H > h_1$, 按式(28)计算可得到作用于挡土墙上的主动极限土压力合力为 $P_a = 462.91 \text{ kN}$, 土压力分布情况如图 3 所示。

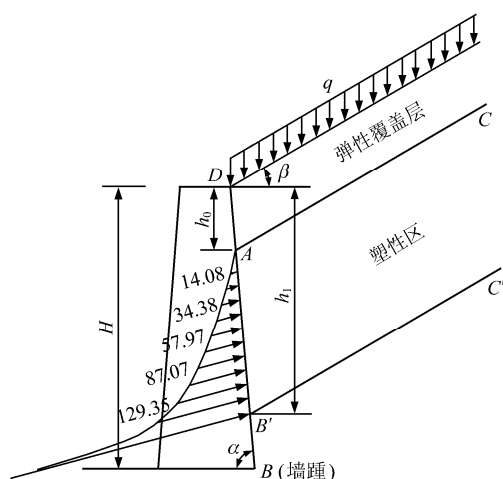


图 3 算例 3 的主动土压力分布 (单位: kPa)

Fig.3 Active earth pressure distribution of example 3 (unit: kPa)

5 结 论

(1) 塑性临界压力 $\tilde{q}_0$ 与参数 α 、 β 、 c 、 φ 、 c_w 有关, 而与 H 、 q 、 γ 、 δ 无关; 塑性临界深度 h_0 与参数 q 、 α 、 β 、 γ 、 c 、 φ 、 c_w 有关, 而与 H 、 δ 无关。

(2) 本文解析解与文献[10]采用迭代算法求解的计算结果完全一致。

(3) 传统计算公式是本文解析解的一个特例, 其适用条件为 $c_w = 0$, $\alpha = \pi/2$ 。

(4) 当 $\beta > \varphi$ 时, 塑性区可能最大深度为有限深度; 当 $\beta \leq \varphi$ 时, 为无穷大, 墙后塑性区开展的实际最大深度应为 H 和 h_1 二者中的较小值。

参 考 文 献

[1] COULOMB C A. Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture[J]. *Mémoires de Mathématique et de Physique Présentés à l'Académie Royale des Sciences*, 1773, 7: 343–382.

[2] RANKINE W J M. On the stability of loose earth[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1857, 147(1): 9–27.

[3] RESAL J. Poussées des terres: Vol. II, Théorie des terres cohérentes[M]. Paris: Librairie Polytechnique, 1910.

[4] TERZAGHI K. Theoretical soil mechanics[M]. New York: John Wiley and Sons, 1943.

[5] MAZINDRANI Z H, GANJALI M H. Lateral earth pressure problem of cohesive backfill with inclined surface[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 1997, 123(2): 110–112.

[6] SILVESTRI V. Discussion to: Lateral earth pressure problem of cohesive backfill with inclined surface, by Z. H. Mazindrani and M. H. Ganjali[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 1999, 125(6): 536–537.

[7] 卢廷浩. 考虑黏聚力及墙背黏着力的主动土压力公式[J]. *岩土力学*, 2002, 23(4): 470–473.

LU Ting-hao. A formula of active earth pressure including cohesion and adhesion[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2002, 23(4): 470–473.

[8] 胡晓军. 黏性土主动土压力库仑精确解的改进[J]. *岩土工程学报*, 2006, 28(8): 1049–1052.

HU Xiao-jun. Improvement on Coulomb accurate solution of active earth pressure to cohesive soil[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2006, 28(8): 1049–1052.

[9] 林智勇, 戴自航, 苏美选. 复杂条件下挡土墙主动土压力解析解[J]. *岩土工程学报*, 2008, 30(4): 555–559.

LIN Zhi-yong, DAI Zi-hang, SU Mei-xuan. Analytical solution of active earth pressure acting on retaining walls under complicated conditions[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2008, 30(4): 555–559.

[10] 彭明祥. 挡土墙主动土压力的库仑统一解[J]. *岩土力学*, 2009, 30(2): 379–386.

PENG Ming-xiang. Coulomb's unified solution of active earth pressure on retaining wall[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2009, 30(2): 379–386.

[11] GNANAPRAGASAM N. Active earth pressure in cohesive soils with an inclined ground surface[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2000, 37(1): 171–177.